ペトリネットのサブクラスにおける状態数計算

情報科学科　谷口　麻礼　　　指導教員：太田　淳

1　はじめに

ペトリネットにおいて状態とは、プレースへのトークンの配置であるマーキングのことである。初期状態から到達可能なすべての状態を求めることは、マーキングM_0をマーキングM_nへ変換する発火の系列が存在するかどうかという可達問題などのペトリネットの多くの解析問題を解く上で必要とされる。しかし、初期マーキングから到達可能なマーキングの数は、一般的には無限であり、たとえ有限であっても、そのネットサイズに対して、指数関数オーダー以上であることが知られている。このことから、状態をすべて列挙することが、手に負えないという状態空間爆発問題が指摘されている。本研究では、状態空間を求める上で、状態空間爆発でない場合と状態空間爆発の場合のそれぞれに対して、適した手法をとる境目を知るために、状態数を求める計算式を提案する。一般的なペトリネットにおける状態数計算式を求めることは、難しいため、ペトリネットの中でも、マークグラフや、状態機械といったサブクラスに対する状態数を求めることができる式を提案する。

2　状態空間と状態数

ペトリネットのマーキングMから 0 回以上のトランジションの発火によってマーキングがM'に到達するとき、M'はMから可達であるという。状態空間とは、ペトリネットの、初期マーキングから可達なすべてのマーキングからなる集合のことである。また、状態数とは、状態空間の要素数、すなわち、モデル化したペトリネットの初期状態から到達可能な状態の数のことである。一般にペトリネットの状態空間は無限集合であるが、状態空間が有限集合であるペトリネットは有界であるという。本研究では有界なペトリネットだけを取り扱う。

3　強連結状態機械の状態数計算式

ペトリネットで、どの状態になっても、トークン数の非負整数重み付き和が変化しないことを式で示すと、式(1)のようになる。ここで、プレース数はnとし、各プレースのトークン数はx_i、bは総トークン数の重み付きの和である。

$$a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n=b \qquad (1)$$

式(1)の非負整数解と重みつき和が一定のマーキングにおける各プレースのトークン数の配置は対応している。この式の非負整数解の個数を求めるために、以下のような無限等比級数の和を用いる。

$$\frac{1}{(1-Z^{a_1})}=(1+Z^{a_1}+Z^{2a_1}+\ldots)$$

この無限等比級数の和をn個掛け合わせたものを$f(Z)$とし、まとめると、

$$f(Z)=\frac{1}{(1-Z^{a_1})(1-Z^{a_2})\cdots(1-Z^{a_n})} \qquad (2)$$

$$=1+\sum_{i=1}^{n}C_iZ^i$$

となる。この時、指数部がbとなるべき項が得られる。よって、係数C_bは、Zの指数部の計算式の非負整数解がbとなる解の個数を示す。ここで、C_bを求めるために、式(3)のような操作を行う。

$$\lim_{Z\to 0}\frac{d^b}{dZ^b}\frac{f(Z)}{b!}=C_b \qquad (3)$$

ここで、強連結な状態機械は、どの状態でも総トークン数は変化しないことから、M_0からMが可達である場合、M_0の時の総トークン数と、Mの時の総トークン数は等しく、また、その逆も真である[1]。よって、a_1からa_nは 1 である。このことから、$f(Z)$は、

$$f(Z)=\frac{1}{(1-Z)^n} \qquad (4)$$

となる。式(4)に対して、式(3)のような操作を行うことによって、状態数が以下の式で求められる。

$$\lim_{Z\to 0}\frac{d^b}{dZ^b}f(Z)\frac{1}{b!}={}_{n+b-1}C_b$$

4　強連結マークグラフの状態数計算式

強連結なマークグラフでは、トークン不変の定理より[1]、

$$B_fM=B_fM_0$$

である。B_fは$m\times n$の基本閉路行列であり、Mは初期状態M_0から可達な状態の各プレースのトークン数をx_iとした行列であることから、式(1)のような式がm個あることがわかる。ここで、mは、プレース数－トランジション数＋1である。よって、無限等比級数の和は、

$$\frac{1}{(1-Z_1^{a_{11}}Z_2^{a_{21}}..Z_m^{a_{m1}})}=1+Z_1^{a_{11}}Z_2^{a_{21}}..Z_m^{a_{m1}}+\ldots$$

となる。$f(Z)$は、式(2)のように、n個掛け合わせたものであり、それに対して、式(3)のような操作を行うと、状態数を表す式は以下の通りとなる。

$$\lim_{Z_1\to 0,Z_2\to 0,\ldots,Z_m\to 0}\frac{\partial^{b_1+b_2+\ldots+b_m}}{\partial Z_1^{b_1}\partial Z_2^{b_2}..\partial Z_m^{b_m}}\frac{f(Z_1,Z_2,\ldots,Z_m)}{b_1!b_2!..b_m!}=C_{b_1b_2..b_m}$$

5　おわりに

本研究では、式の解の個数と状態数が対応することや、無限等比級数の和を利用することで、ペトリネットのサブクラスである状態機械と、マークグラフに対して、状態数を求めることができる計算式を提案した。状態機械に関しては、${}_{n+b-1}C_b$という、より計算が簡単な式を提案することができた。確率統計の重複組み合わせの公式と等しくなったのは、n個のプレースに対してb個のトークンを重複を許して配置するという考え方から理解することができる。

参考文献

[1]　村田忠夫　：　「ペトリネットの解析と応用」、近代科学社、(1992)
[2]　M.ベック, S.ロビンス著、岡本訳：「離散体積計算による組み合わせ数学入門」、丸善出版、(2012)
[3]　洲崎武史　山口真悟　：「ペトリネットの状態数計算問題の考察」、電子情報通信学会　基礎・境界ソサエティ大会、(2012)